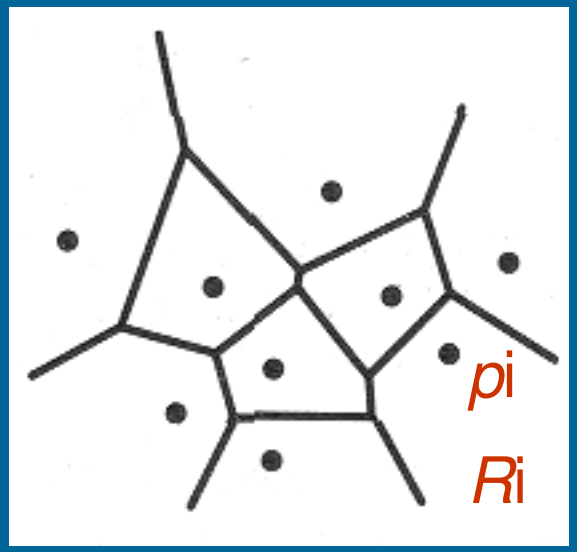
Voroného diagramy

I.Kolingerová

1850 Dirichlet (koncept), 1908 Voronoi (diagram)

Zn: Vor(S), VD, S – množina bodů v rovině,
$S=\{p1,p2,..,pn\}$

Vor(S) – dělení roviny



[Las96]

Ri – Vor. oblast

(obsahuje ty body roviny,

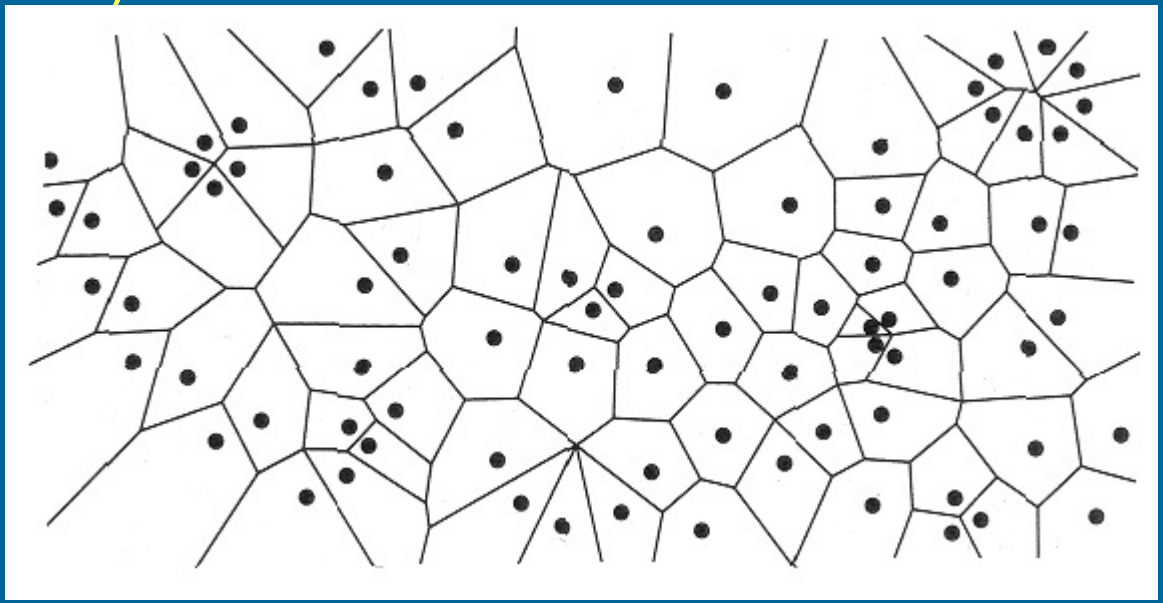
pro kt. je pi nejbližší z bodů)

Matematicky:

$$Ri = \{x : | pi - x | \leq | pj - x |, \forall j \neq i\}$$

(1 Vor. oblast)

Vor(S) je pak hranice mezi oblastmi (= množina bodů, kt. mají více než jednoho nejbližšího souseda)

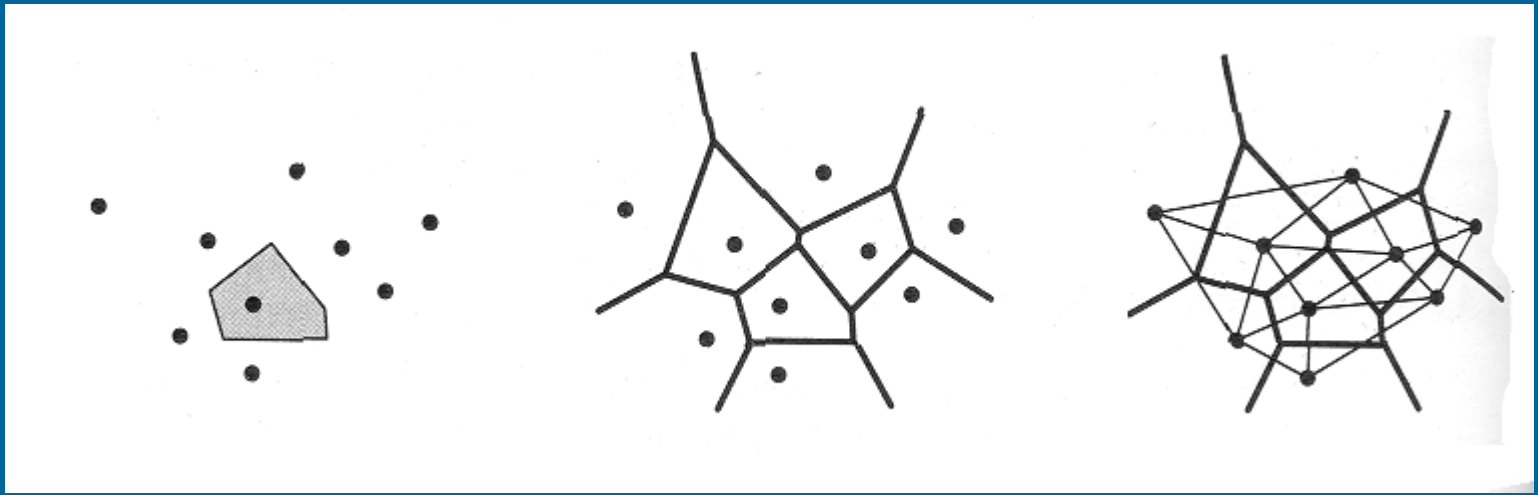


[Las96]

n=80

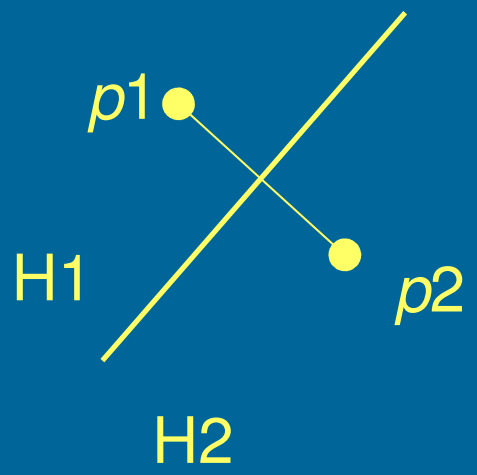
Vlastnosti:

- oblasti konvexní
- v každé oblasti 1 bod *S*
- některé oblasti neuzavřené
- pokud žádné 4 body neleží na kružnici, mají uzly stupeň 3
- uzel – stejná vzdálenost od 3 bodů z *S*
- hrana – stejná vzdálenost od 2 bodů z *S*
- je-li *p*i nejbližší soused *p*j, pak *R*i, *R*j sdílejí hranu ve Vor(*S*)
- přímkový duál Vor(*S*) je triangulace (tzv. Delaunayova triangulace)

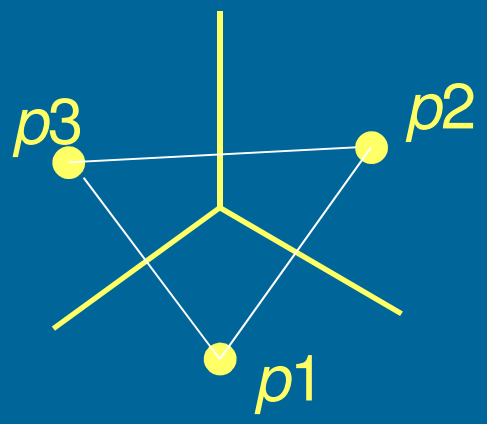


[Las96]

2 body

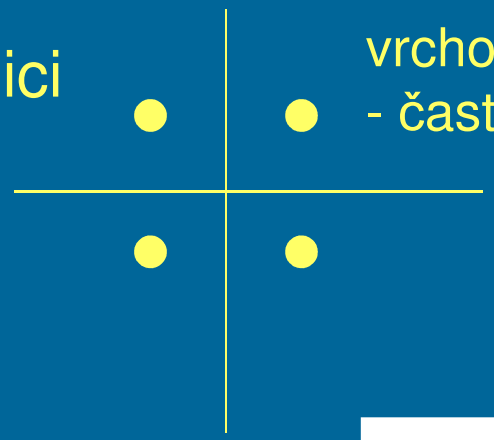


3 body



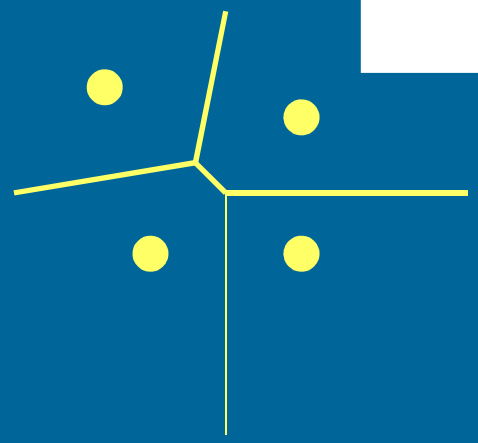
4 body

leží na kružnici



vrchol stupně 4
- často se vylučuje

neleží na kružnici

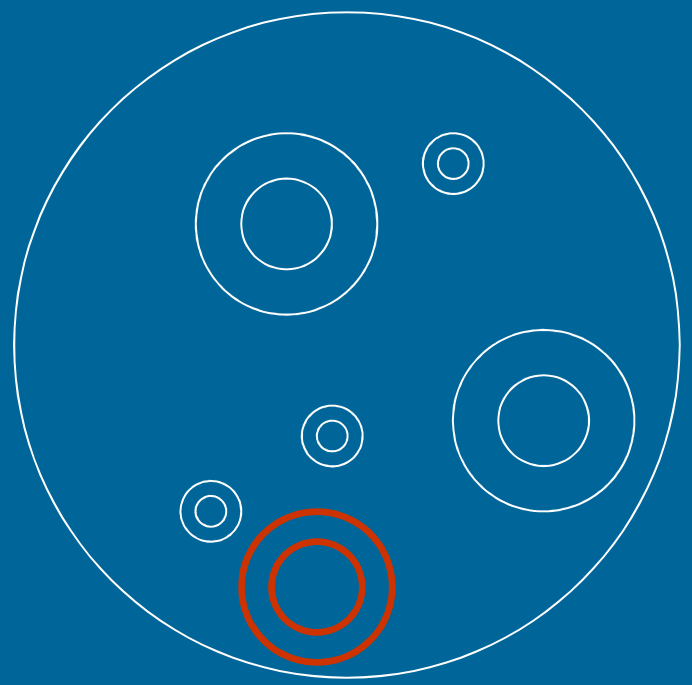


$$Ri = \bigcap_{i \neq j} H(pi, pj)$$

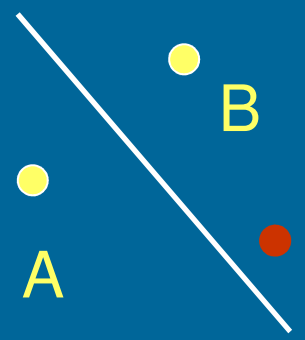
Aplikace:

1. nejbližší bod dané množiny, nejbližší soused

   - např. sdružování nejbliž. sousedů pro rozpoznávání vzorů

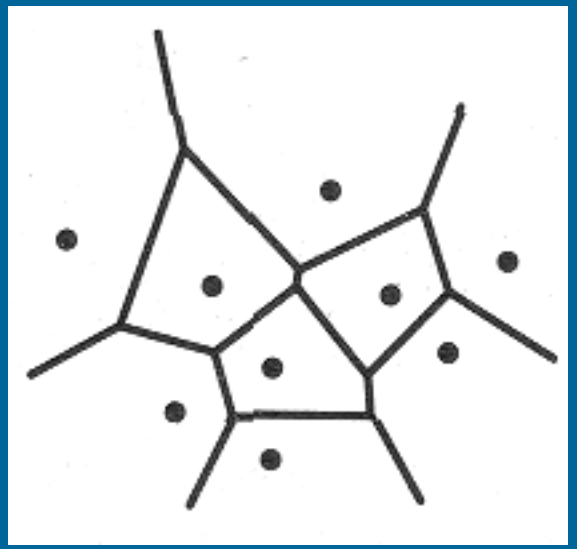


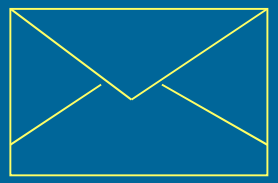
typ A: průměry 2,3
typ B: průměry 3,4



leží v oblasti B =>
typ B

- problém poštovního úřadu

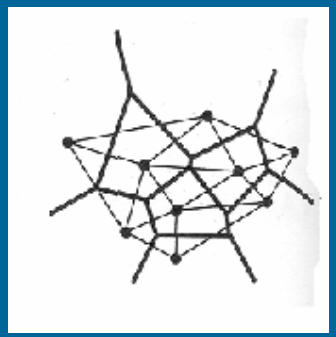




?

[Las96]

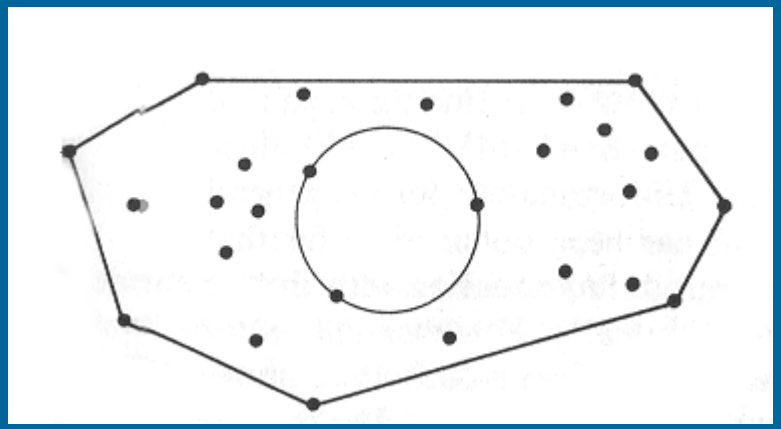
2. triangulace – maximalizuje minimální úhel



[Las96]

3. největší prázdný kruh

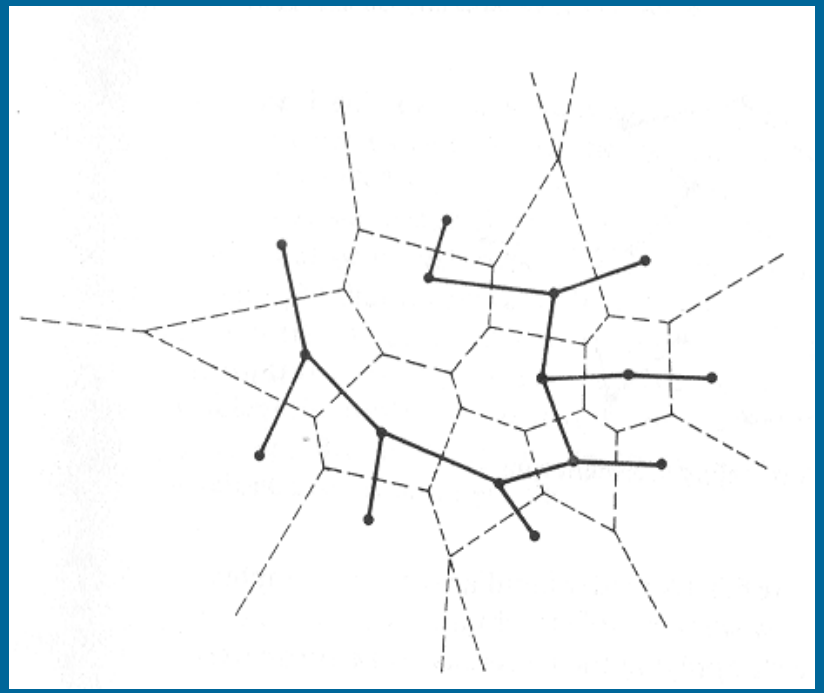
- př.: umístění nového obchodu a potravinami v oblasti, kde jich už několik existuje a kde je rovnoměrná hustota obyvatelstva
- př.: umístění jaderného reaktoru

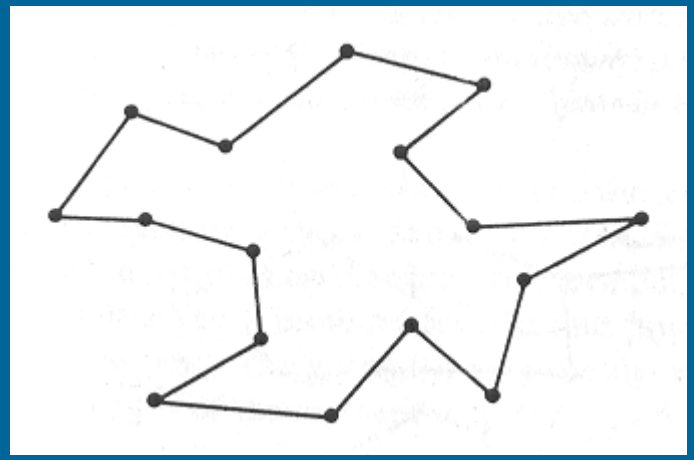


[Pre85]

4. minimal spanning tree (MST)

- strom s minimální délkou, procházející všemi body
- užití: LAN
- přibližné řešení problému obchodního cestujícího





[Pre85]

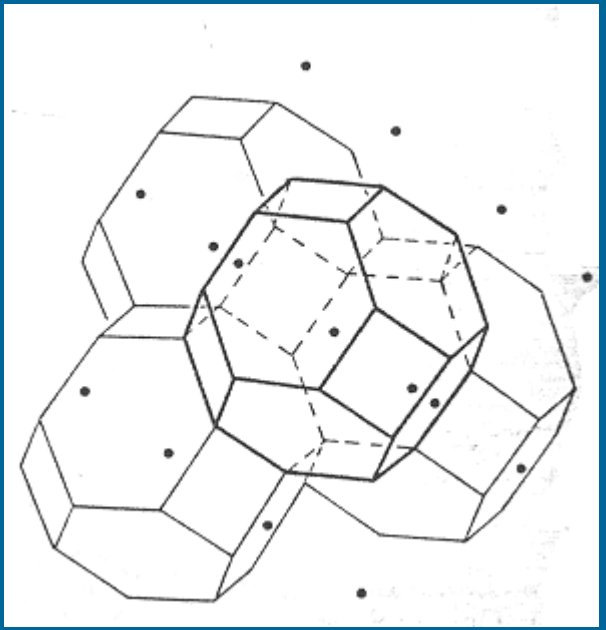
5. strážní věže

- ohně, centra bouřek, kulturní centra …

[Ber97]

6. krystalografie

- pro simulaci růstu krystalů

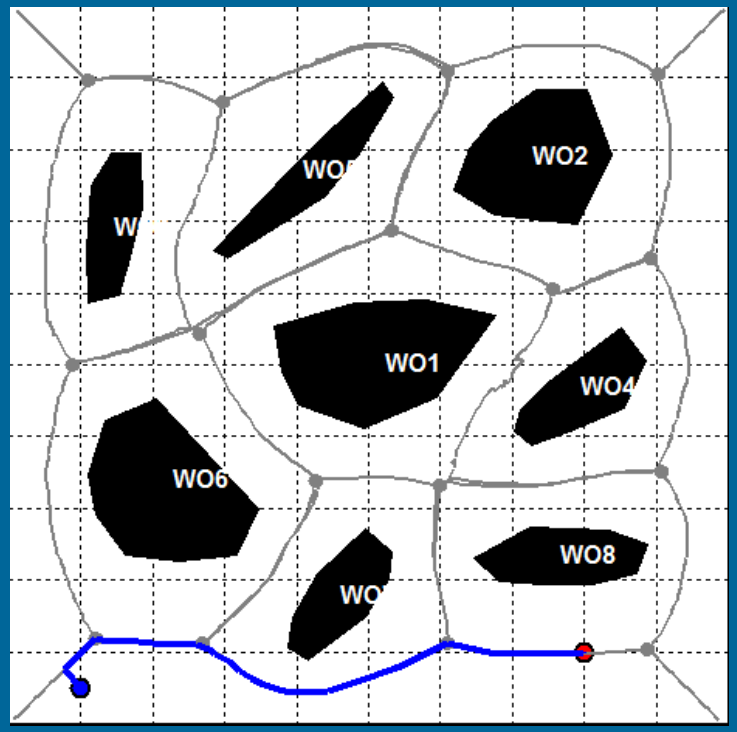


[Aur91]

7. archeologie

8. plánování dráhy

- dráha robota co nejdále od všech překážek
- Používá VD, zobecněný VD, power diagram …



Konstrukce:

1. Rozděl a panuj *O(N log N)*

1. *S* -> *S*1, *S*2; *S*1, *S*2 lineárně oddělitelné dělicí přímkou *O(N)* - medián
2. Rekurzivní konstrukce Vor(*S*1), Vor(*S*2)
3. Vor(*S*1), Vor(*S*2) => Vor(*S*) *O(N)*

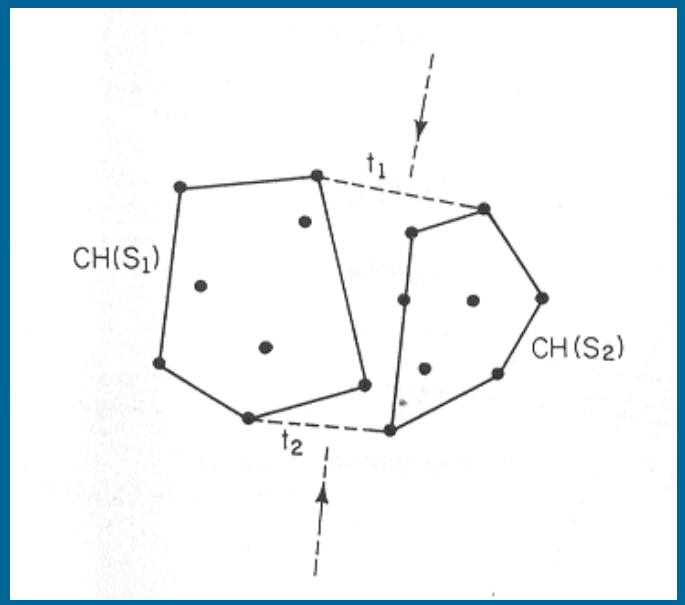
a) určit 2 tečny k CH(*S*1) a CH(*S*2)

b) vzít kolmé bisektory těchto tečen *l*1,*l*2

c) najít 1. průsečík *l*1 s *R*i, *R*j´, přes něj vstup do *R*k (resp. *R*k´)

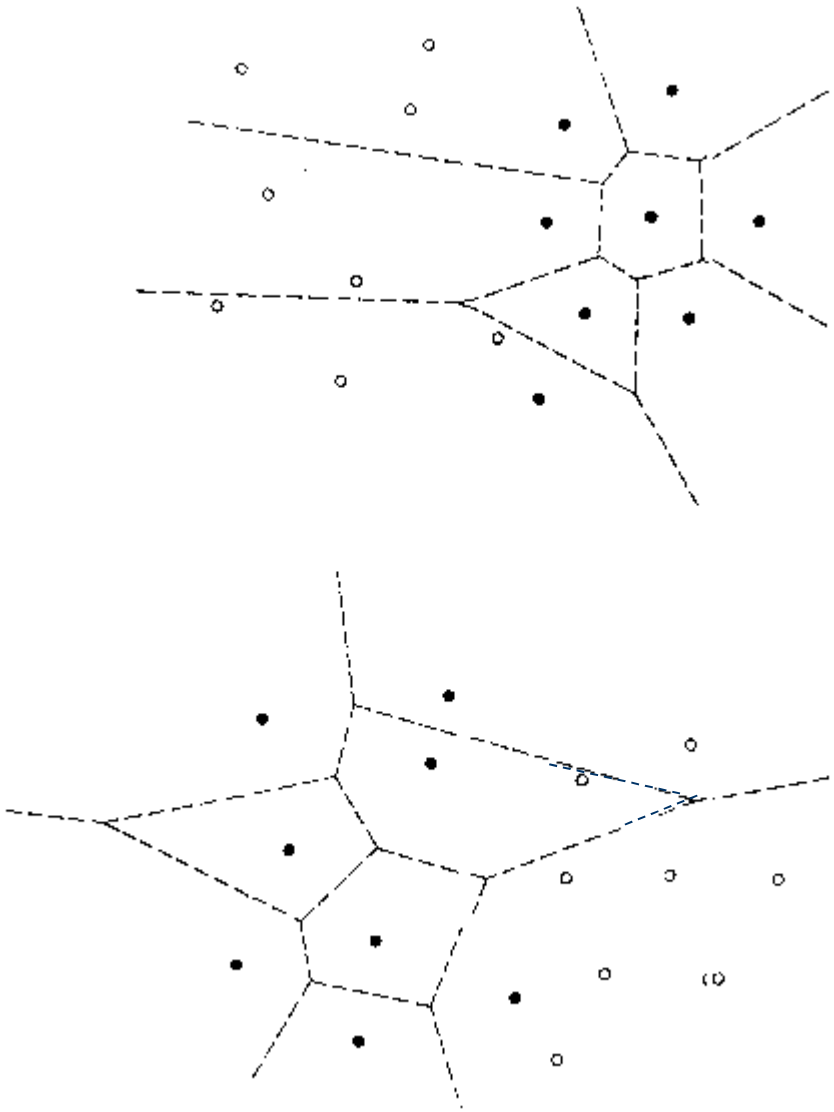
d) z *l*1 přejít na bisektor *p*k (*p*k´) a *p*j´(*p*i)

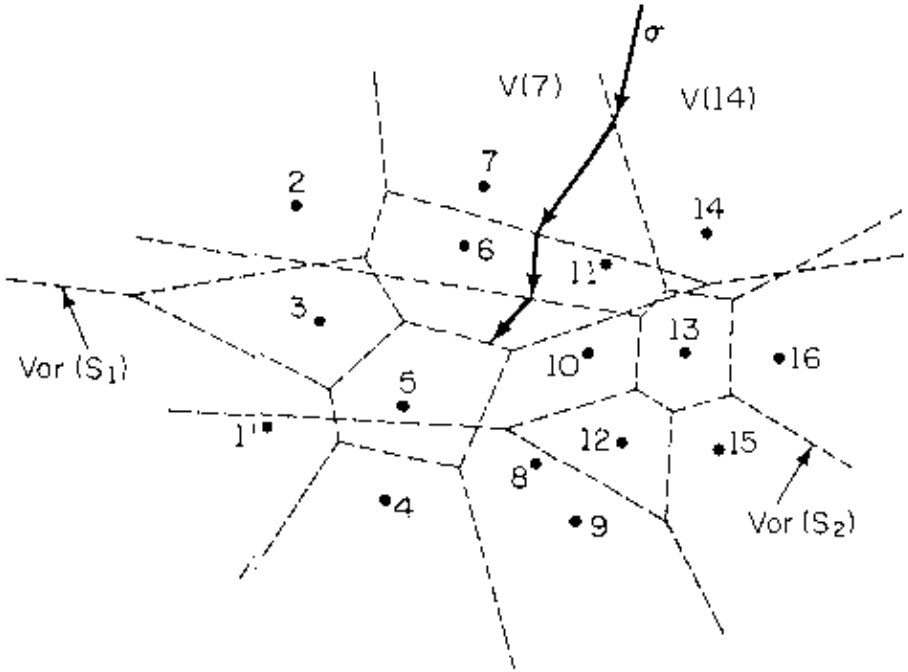
- atd. až k *l*2 *O(N)*



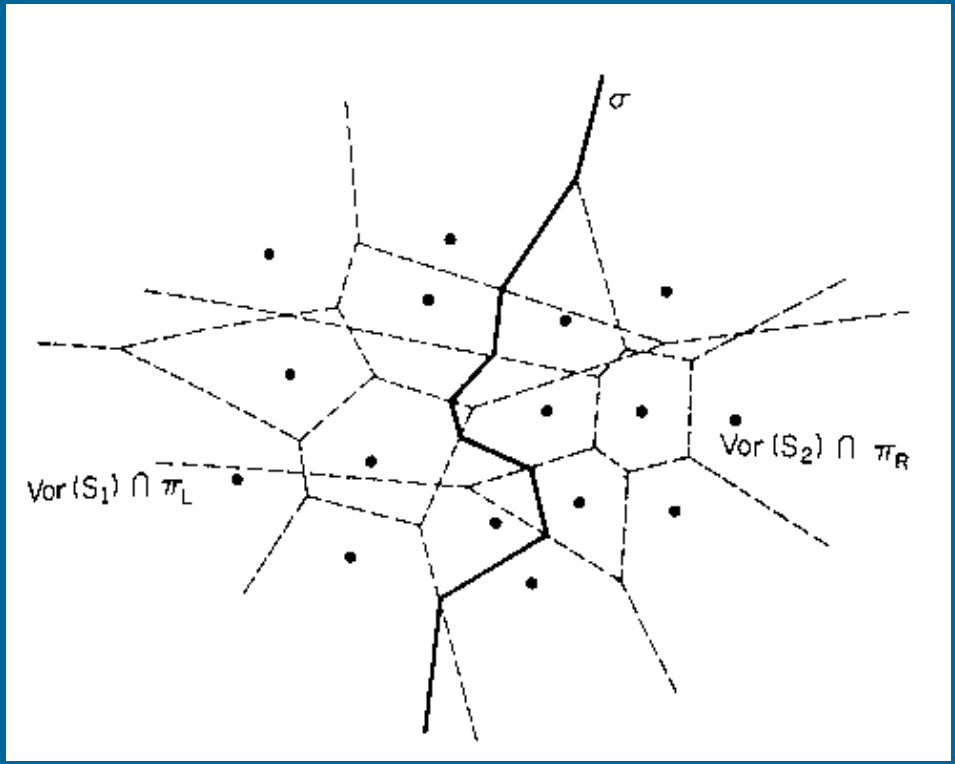
[Pre85]

- obtížnější implementace
+ optimální složitost



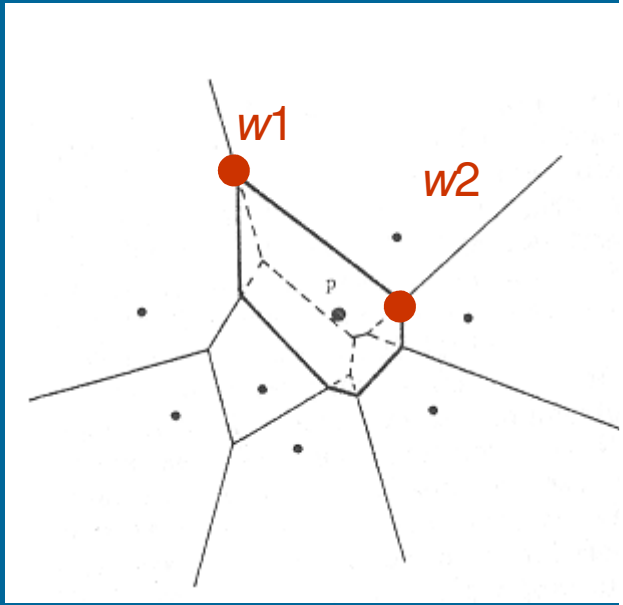


[Pre85]



[Pre85]

2. Inkrementální algoritmus $O(N^2)$



[Oro94]

Máme Vor ($p1$,$p2$,...,pl-1),

přidáme pl

1. Najít oblast, kde pl leží =>$w1$,$w2$
2. od $w2$ k $w1$ postupujeme
   přes hranice oblastí pomocí bisektorů

- *nejhorší případ* $O(N^2)$; jde zlepšit na očekávané $O(N)$
- komplikace s neuzavřenými oblastmi, trik: zavřít do trojúhelníka
- jednoduchá implementace

Odkazy

[Aur91] Aurenhammer F.: Voronoi Diagrams — A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure, ACM Computing Surveys, Vol.23, No.1, 1991

[Ber97] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf, O.: Computational Geometry. Algorithms and Applications, Springer-Verlag (1997)

[Las96] Laszlo M.J.: Computational Geometry and Computer Graphics in C++, Prentice Hall, 1996

[Oka] Okabe A. et al.: Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, 2nd edition, Wiley Seties, 2008

[ORo94] O'Rourke J.: Computational Geometry in C, Cambridge University Press, 1994 (first edition), 1998 (second edition)

[Pre85] Preparata F.P., Shamos M.I.: Computational Geometry: An Introduction, Springer Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985